

Über die Ultrarotabsorption freier Ladungsträger bei nichtparabolischer Bandstruktur am Beispiel InSb

Von F. R. KESSLER und E. SUTTER

Aus dem Institut für Experimentalphysik der Universität des Saarlandes, Saarbrücken
(Z. Naturforsch. 16 a, 1173—1179 [1961]; eingegangen am 27. Juli 1961)

Bei nichtparabolischem Bandverlauf ist wegen der Energieabhängigkeit der effektiven Masse der Absorptionskoeffizient der „Leitungsabsorption“ freier Träger nicht mehr proportional zur Trägerdichte. Die Meßergebnisse an 16 n-leitenden InSb-Proben wachsender Trägerdichte [$N = 2 \cdot 10^{16}$ (Eigenleitungsdichte bei 20 °C) bis $1,24 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$] bestätigen die Erwartung. Die Theorie des Absorptionskoeffizienten bei nichtparabolischem Band wird diskutiert, um umgekehrt aus der gemessenen Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Trägerdichte den Bandverlauf $E(k)$ zu ermitteln. Unter Verwendung der quantentheoretisch adaptierten DRUDESchen Theorie gelingt dies. Der Verlauf des Leitungsbandes von InSb wird auf diese Weise von $k=0$ bis $k=4 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$ (bzw. vom Bandrand bis 0,2 eV Abstand vom Bandrand) quantitativ angegeben, womit auch die effektive Masse eines einzelnen Elektrons als Funktion von k bzw. E im genannten Bereich bekannt ist. Am Bandrand beträgt $m^* = 0,016 m_0$ und wird mit wachsendem Abstand größer.

Problemstellung

Bei nichtparabolischem Valenz- bzw. Leitungsband kommt den freien Ladungsträgern darin keine konstante effektive Masse zu. Diese ist vielmehr für jeden Träger eine Funktion seiner Energie. Damit ist auch der Absorptionsquerschnitt eines freien Ladungsträgers gegenüber Ultrarotstrahlung, und zwar für Absorption auf Grund der optischen Leitfähigkeit, d. h. der Energieaufnahme innerhalb eines Bandes, eine Funktion seiner Energie. Wächst die Dichte der freien Ladungsträger, sei es durch Temperaturerhöhung, sei es durch Dotierung, so werden in dem jeweiligen Band die Träger bei höheren Energien eingebaut gemäß der FERMI-Verteilung $f(E)$ und der Dichte der Energiezustände $D(E)$. Der Absorptionsquerschnitt der Elektronen ist damit konzentrationsabhängig geworden. Für den Absorptionskoeffizienten einer Gesamtheit von Elektronen erwartet man, daß er nicht mehr proportional ist zur Konzentration der freien Ladungsträger, wie es bei parabolischem Bandverlauf der Fall ist, sondern daß eine von der jeweiligen Bandstruktur abhängige Abweichung von der Linearität vorliegt.

Die vorliegende Arbeit legt dazu Messungen des Absorptionskoeffizienten an n-leitendem Indium-Antimonid vor, das eine nichtparabolische Leitungsbandstruktur besitzt. Die Absorptionsmessungen wurden an 16 verschiedenen Proben aufsteigender Elektronendichte (von der Eigenleitungsdichte bei Zimmertemperatur $2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ bis $1,24 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$) durchgeführt mit dem Ziel, die Proportionalität des Absorptionskoeffizienten zur Dichte der freien La-

dungsträger zu überprüfen und auch die Wellenlängenabhängigkeit der Absorption freier Ladungsträger in Indium-Antimonid zu untersuchen.

Es wird ferner die Theorie des Absorptionskoeffizienten bei nichtparabolischem Band diskutiert, um umgekehrt aus der gemessenen Funktion des Absorptionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Trägerdichte den Bandverlauf des Leitungsbandes $E(k)$ zu ermitteln.

Die Schwierigkeit der expliziten Auswertung der quantentheoretischen Formel macht es jedoch notwendig, als Näherung die quantentheoretisch angepasste DRUDESche Theorie der Absorption freier Ladungsträger heranzuziehen. So gelingt es, den $E(k)$ -Verlauf des Bandes quantitativ zu ermitteln.

Experimentelle Ergebnisse

Tab. 1 gibt eine Übersicht über die Trägerdichten und Leitfähigkeiten der Proben. In der dritten Spalte sind die mit Hilfe der Beziehung $\sigma = e N b$ errechneten Beweglichkeiten (es sind mittlere Beweglichkeiten, vgl. weiter unten) eingetragen.

Abb. 1 zeigt für die Proben den Verlauf des Absorptionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Man sieht den steilen Anstieg des Absorptionskoeffizienten in der Absorptionskante, die sich, wie bekannt ist, mit wachsender Dotierung zu kürzeren Wellenlängen verschiebt.

Im Durchlässigkeitsbereich steigt der Absorptionskoeffizient mit λ^2 monoton an (vgl. die Hilfslinie in Abb. 1). Die Tatsache, daß dieser Wellenlängenbereich eine Absorption zeigt, deren Frequenzabhän-



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Probe Nr.	N cm^{-3}	σ $\Omega^{-2} \text{ cm}^{-1}$	b $\frac{\text{cm}}{\text{sec}} / \frac{\text{V}}{\text{cm}}$
1	$2 \cdot 10^{26} *$	nicht ausgewertet, da K nicht $\sim \lambda^2$	
2	$2 \cdot 10^{26} *$		
3	$2 \cdot 10^{26} *$		
4	$6,32 \cdot 10^{16}$	545	$5,4 \cdot 10^4$
5	$8,27 \cdot 10^{16}$	648	$4,9 \cdot 10^4$
6	$1,002 \cdot 10^{17}$	761	$4,75 \cdot 10^4$
7	$1,23 \cdot 10^{17}$	698	$3,54 \cdot 10^4$
8	$1,27 \cdot 10^{17}$	902 **	$4,44 \cdot 10^4$
9	$1,31 \cdot 10^{17}$	923	$4,4 \cdot 10^4$
10	$1,41 \cdot 10^{17}$	1025	$4,54 \cdot 10^4$
11	$7,40 \cdot 10^{17}$	3185	$2,69 \cdot 10^4$
12	$7,42 \cdot 10^{17}$	3670	$3,09 \cdot 10^4$
13	$8,7 \cdot 10^{17}$	2840	$2,04 \cdot 10^4$
14	$9,4 \cdot 10^{17}$	6890	$4,55 \cdot 10^4$
15	$1,15 \cdot 10^{18}$	4000 **	$2,16 \cdot 10^4$
16	$1,24 \cdot 10^{18}$	4100 **	$2,06 \cdot 10^4$

Tab. 1.

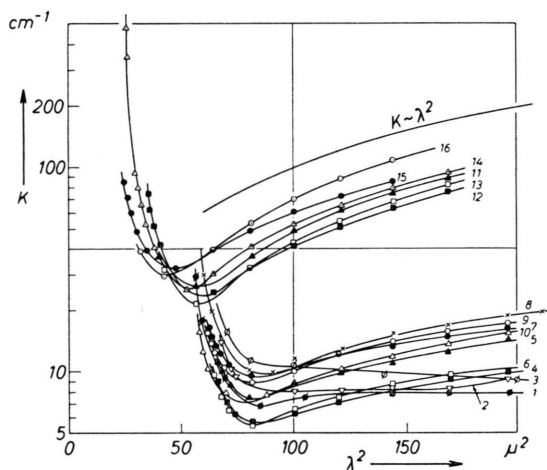


Abb. 1. Absorptionskoeffizient $K[\text{cm}^{-1}]$ logarithmisch aufgetragen gegen λ^2 für 16 InSb-Proben wachsender Elektronendichte (Tab. 1 gibt zu den Probennummern die Trägerdichten und Beweglichkeiten an). Die Hilfslinie entspricht der λ^2 -Abhängigkeit.

gigkeit mit der klassischen Absorptionsformel nach DRUDE zu erklären ist¹, bestätigt zunächst, daß man wirklich die Leitungsabsorption freier Ladungsträger mißt, und diese nicht durch andere Absorptionsmechanismen (Bandübergänge innerhalb sich über-

lappender Bänder des Leitungsbandes oder ganz andere Extinktionsursachen) verdeckt ist. Eine nähere Diskussion der Wellenlängenabhängigkeit erfolgt unten.

Lediglich 3 Proben mit den kleinsten Leitfähigkeiten (Probennummern 1, 2 und 3) zeigen die auch beim Germanium bekannte Erscheinung der „Grundabsorption“²⁻⁴: Ein bisher noch ungeklärter Extinktionsmechanismus liegt vor, der die kleine Trägerabsorption in diesen Fällen überdeckt. Die Wellenlängenabhängigkeit der „Grundabsorption“ läßt sich nicht eindeutig ermitteln. Sie ist fast konstant und relativ uncharakteristisch in diesem Wellenlängenbereich. Bei größeren Wellenlängen tritt die freie Trägerabsorption, die mit λ^2 anwächst, dann wieder in Erscheinung, wie sich in den angegebenen Kurven schon andeutet.

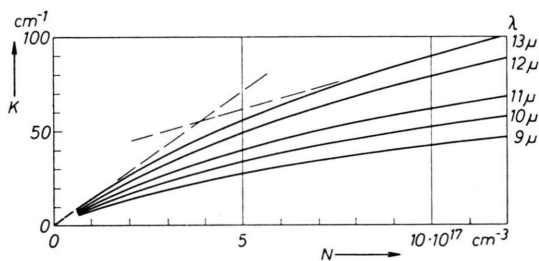


Abb. 2. Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten K der Absorption freier Elektronen in InSb von der Trägerdichte bei 5 verschiedenen Wellenlängen. (Um das Bild nicht zu verwirren, sind die Meßpunkte nicht eingetragen. Diese Kurven wurden zu der Auswertung nicht herangezogen.)

Abb. 2 zeigt die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten der „guten“ Proben von der Elektrodendichte für 5 verschiedene Wellenlängen, die im Bereich der oben genannten Durchlässigkeit entnommen sind. Es bestätigt sich die Erwartung, daß der Absorptionskoeffizient nicht proportional zur Trägerzahl ansteigt⁵.

Die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Trägerdichte ist bei kleinen Dichten durch eine Tangentengerade angenähert, die befriedigend durch den Nullpunkt geht. Die Abweichung von der Linearität ist derartig, daß der Absorptionskoeffizient schwächer wächst als die Trägerdichte. Daraus

* Eigenleitung bei 20 °C.

** Rückwärts aus b errechnet.

¹ Im vorliegenden Fall handelt es sich bei den geringen Störstellendichten ausschließlich um die Streuung der Elektronen durch Phononen. Eine Abweichung von der λ^2 -Abhängigkeit ist bei hohen Dotierungen zu erwarten

und durch einen von der reinen Phononenstreuung abweichenden Streumechanismus zu erklären.

² J. JAUMANN u. F. R. KESSLER, Z. Naturforsch. **11 a**, 387 [1956].

³ F. R. KESSLER u. D. RICCIUS, Z. Naturforsch. **12 a**, 443 [1957].

⁴ F. R. KESSLER, Ann. Univ. Saraviensis **VIII**, 33 [1959].

⁵ Bei Germanium und Silicium mit ihren parabolischen Bändern hat sich strenge Proportionalität ergeben.

läßt sich bei einfacher Betrachtung im Vergleich mit der Absorptionsformel nach DRUDE⁶

$$K = C \frac{N}{m^{*2} b} \lambda^2, \quad (1)$$

C = Konstante, N = effektive Masse der Elektronen, m^* = Elektronendichte, b = Beweglichkeit, λ = Wellenlänge.

ableiten, daß die effektive Masse nicht konstant ist, vielmehr mit wachsendem N für die Gesamtheit ein wachsender Mittelwert $\overline{m^*}$ einzusetzen ist.

Damit wird zunächst die durch andere Meßverfahren⁷ bei Indium-Antimonid gefundene Abweichung vom $E \sim k^2$ -Verlauf bestätigt, und zwar qualitativ in dem Sinn, daß das Band am Rande zwar parabolisch verläuft, jedoch mit wachsendem Abstand vom Bandrand eine wachsende Linearisierung des $E(k)$ -Verlaufs einsetzt.

Für höhere Energien wird die effektive Masse damit größer, der Absorptionsquerschnitt wird für dortige Elektronen kleiner, womit der Absorptionskoeffizient einer Gesamtheit von Elektronen schwächer als proportional zur Gesamtzahl anwächst.

Es ist von Bedeutung, diesen Mittelwert $\overline{m^*}$ in Abhängigkeit von der Trägerdichte aufzutragen, denn da das Leitungsband am Bandrand parabolisch verläuft, liefert eine Extrapolation auf die Trägerdichte Null die effektive Masse am Bandrand.

Zur Umrechnung des Absorptionskoeffizienten auf die mittlere effektive Masse [nach Gl. (1) bzw. (18)] benötigt man außer der Trägerdichte noch die mittlere Beweglichkeit der freien Ladungsträger. Die gemessene Leitfähigkeit an den einzelnen Proben ergibt zusammen mit der gemessenen Trägerdichte diese Beweglichkeit. Die Beweglichkeit ist in Abb. 3 in Abhängigkeit von der Trägerdichte aufgetragen⁸. Die relativ starke Streuung einzelner Meßwerte dürfte in der polykristallinen Struktur der Proben ihre Erklärung finden. Um diese Beweglichkeitsschwankungen, die z. Tl. durch Korngrenzen vorgetäuscht sein können, nicht in die Rechnung zu übernehmen, wurden die Meßpunkte durch eine Kurve angenähert. Die zu den Trägerdichten auf dieser Kurve liegende Beweglichkeit wurde bei der

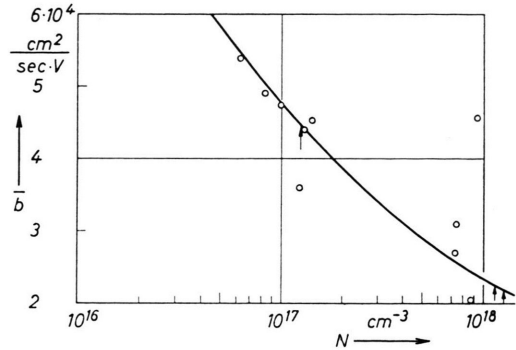


Abb. 3. Abhängigkeit der mittleren Beweglichkeit einer Gesamtheit von Elektronen in InSb von ihrer Dichte, ermittelt aus Trägerdichte und elektrischer Leitfähigkeit der Proben.

Ausrechnung der oben mitgeteilten mittleren effektiven Masse verwendet.

Die Auswertung der Absorptionsmessungen erfolgt bezüglich der Wellenlänge derart, daß K gegen λ^2 aufgetragen wurde. Für alle Proben liegen die Meßpunkte in ausgezeichneter Weise auf Geraden. Die Steigung der Geraden liefert – als Mittelwert – die zur Auswertung herangezogene Größe

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda^2} = c \frac{N}{m^{*2} b}. \quad (2)$$

Umgekehrt heißt das, daß sich in dem vorliegenden Wellenbereich (7μ bis $14,5 \mu$) die ermittelte Größe m^* und damit auch der $E(k)$ -Verlauf (vgl. weiter unten) unabhängig von λ stets gleich ergeben.

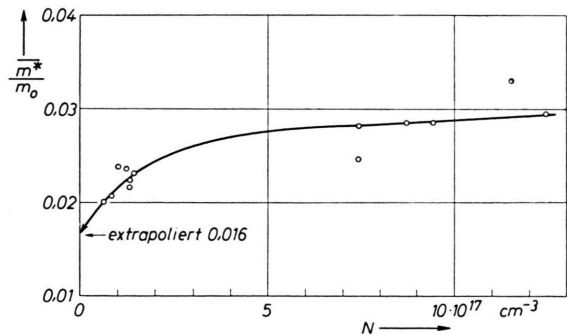


Abb. 4. Mittlere effektive Masse – gewonnen aus dem Absorptionskoeffizienten – für Elektronen in InSb in Abhängigkeit von der Trägerdichte.

⁶ Die verschiedenen Absorptionstheorien werden aufgeführt bzw. miteinander verglichen bei den Literaturstellen^{2, 4, 11, 13}. Die Voraussetzung für die angegebene Näherungsformel $\omega^2 \cdot \tau^2 \gg 1$ (ω = Kreisfrequenz der Strahlung; τ = Stoßzeit der Elektronen) ist im vorliegenden Fall erfüllt; stets bleibt $\omega^2 \tau^2 \geq 25$.

⁷ Als jüngere Zusammenfassungen über InSb seien genannt: a) M. MICHEL RODOT, J. Phys. Rad., Paris 19, 140

[1958]; b) T. S. Moss, Optical Properties of Semiconductors, Butterworths Scientific Publ., London 1959; c) T. S. Moss, Indium Antimonid, in: Progress in Semiconductors, Bd. 5, Heywood & Co., London 1960.

⁸ Da die Beweglichkeit auch von der effektiven Masse abhängt (vgl. Gl. 16), ändert sich die Beweglichkeit auch bei vorwiegender Phononenstreuung mit der Trägerdichte.

⁹ W. G. SPITZER u. H. Y. FAN, Phys. Rev. 106, 882 [1957].

Abb. 4 zeigt die auf diese Weise aus dem Absorptionskoeffizienten gewonnene mittlere effektive Masse in Abhängigkeit von der Trägerdichte. Für den Bandrand ergibt sie sich zu $0,016 m_0$ in sehr guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Meßmethoden. Zum Beispiel ermitteln SPITZER und FAN⁹ ebenfalls durch Extrapolation aus der Polarisierbarkeit freier Elektronen die effektive Masse am Bandrand zu $0,016 m_0$. Für den weiteren Vergleich bei *endlichen* Trägerdichten ist jedoch zu beachten, daß die Mittelung vom physikalischen Mechanismus her in beiden Fällen eine andere ist.

Der bei Moss^{7b} zitierte Zusammenhang

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{k} \frac{\partial E}{\partial k} \quad (3)$$

gilt zwar für den aus dem Brechungsindex gewonnenen Mittelwert $\overline{m^*}$, jedoch *nicht* für den aus dem Absorptionskoeffizienten bestimmten Mittelwert, der im folgenden behandelt wird. Natürlich fallen die Mittelwerte aller Messungen für kleine Trägerdichten zusammen. Eine gewisse Annäherung ergibt sich dann auch wieder bei hohen Trägerdichten, da die Dichte der Energiezustände im Innern des Bandes stark anwächst. Der Mittelwert der effektiven Masse wird dann im wesentlichen durch die dort befindlichen Träger bestimmt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die bei Moss^{7b} publizierte Darstellung der Abhängigkeit der effektiven Masse von der Trägerdichte (Fig. 16.5) insofern irreführend ist, als der *Mittelwert*¹⁰ der effektiven Masse einer Gesamtheit von Elektronen aufgeführt ist, die das Leitungsband bis zum angegebenen Energiewert auffüllen. Erst aus dem zu ermittelnden $E(k)$ -Verlauf läßt sich dann die effektive Masse *eines* Elektrons in Abhängigkeit von seiner jeweiligen Energie an der dortigen Stelle im Band ermitteln. Die vorliegende Arbeit liefert in diesem Sinne m^* in Abhängigkeit von E mit Hilfe des Absorptionskoeffizienten.

Die folgenden Überlegungen und Rechnungen bezüglich des Bandverlaufs $E(k)$ werden zwar am Beispiel InSb durchgeführt, sie gelten jedoch auch in anderen analogen Fällen.

Bestimmung des $E(k)$ -Verlaufs

Um aus der Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Trägerdichte auf den Bandverlauf zurückzuschließen, geht man zweckmäßigerweise auf den Absorptionsquerschnitt $q(E)$ eines freien La-

dungsträgers zurück. Dieser muß bei nichtparabolischem Band als energieabhängig eingesetzt werden.

Allgemein stellt sich dann der Absorptionskoeffizient dar als

$$K = \int_{E_{\text{Rand}}}^{\infty} q(E) D(E) f(E) dE. \quad (4)$$

Allgemein gilt ferner für die Gesamtzahl der freien Ladungsträger

$$N = \int_{E_{\text{Rand}}}^{\infty} D(E) f(E) dE. \quad (5)$$

Geht man zur Berechnung der Energieabhängigkeit des Absorptionsquerschnittes von den quantentheoretischen Überlegungen von SCHMIDT¹¹ aus, indem man sie auf nichtparabolische Bandverhältnisse überträgt, so ergibt sich für K ein Integral, in dem für die Dichtefunktion $D(E)$ und den Impuls des Elektrons nicht nur dessen Ausgangsenergie E_0 , sondern auch dessen Endenergie $(E_0 + h\nu)$ eingeht, und zwar auf folgende Weise:

Der Übergang innerhalb eines Bandes erfolgt nur mit Phononenwechselwirkung, und zwar grundsätzlich auf zwei Wegen. Für den Absorptionsprozeß ist der *erste Weg*: Lichtquantenabsorption unter praktischer Erhaltung des Ausbreitungsvektors, dann Impulsausgleich durch Phononen bei praktisch ungeänderter Energie. *Zweiter Weg*: Zuerst Impulsübertragen durch Phononen (ohne Energieänderung), dann Lichtquantenabsorption bei Erhaltung des Ausbreitungsvektors. Für die Lichtquanten-Emission stehen beide Wege in Umkehrung zur Verfügung. Allerdings braucht man zur Berechnung des Absorptionskoeffizienten die induzierte Emission dann nicht zu berücksichtigen, wenn die höheren Energiezustände nicht besetzt sind, d. h. wenn $h\nu$ größer ist als der Abstand E_0 eines Elektrons vom Leitungsbandrand¹². Da E_0 bei Gültigkeit der BOLTZMANN-Statistik im Band (d. h. keine Entartung) im Mittel (kT) beträgt, fällt die induzierte Emission in der Betrachtung dann aus, wenn $h\nu \gg kT$, was zunächst für das Folgende angenommen werden soll.

Die Übergangswahrscheinlichkeit W_1 für den Weg 1 ist das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit des Überganges bei Lichtquantenwechselwirkung $W_{h\nu}$, der Wahrscheinlichkeit der Phononenwechsel-

¹⁰ In der vorliegenden Arbeit mit $m^*(k_v)$ bezeichnet.

¹¹ H. SCHMIDT, Z. Phys. **139**, 433 [1954].

¹² Dann fällt nämlich $(E_0 - h\nu)$ in die verbotene Energielücke, wo $D(E)$ und damit die Übergangswahrscheinlichkeit gleich Null ist.

wirkung W_{ph} und der Dichte der Energieendzustände an der Stelle $(E_0 + h\nu)$.

$$W_1 = W_{hv} W_{ph} D(E_0 + h\nu). \quad (6)$$

Dabei ist W_{ph} unabhängig vom Impuls des Elektrons. W_{hv} ist durch das Impulsmatrixelement des Energie-Ausgangs-Zustandes und die dortige effektive Masse bestimmt. Für den zweiten Weg gilt das Analoge, jedoch ist für W_{hv} der Impuls an der Stelle $(E_0 + h\nu)$ einzusetzen. So ergibt sich für den Absorptionskoeffizienten

$$K \sim \frac{h\nu}{F^2} \int_{E_{Rand}}^{\infty} D(E) D(E + h\nu) f(E) \cdot [W_{hv}(E) + W_{hv}(E + h\nu)] dE \quad (7)$$

($\overline{F^2}$ = Mittelwert des Quadrates der Feldstärke).

Die Schwierigkeit, aus diesem Integral den Bandverlauf zu ermitteln, liegt darin, daß im Integral nicht nur die Energie und damit der Bandverlauf an einer bestimmten Stelle auftritt, sondern auch bei dem um $h\nu$ höheren Energiezustand. Der $E(k)$ -Verlauf ist sowohl in der Dichtefunktion $D(E)$ enthalten gemäß der Gleichung (für sphärische Energieflächen)

$$D(E) = \text{const } k^2 / \frac{\partial E}{\partial k} \quad (8)$$

als auch enthalten in der Übergangswahrscheinlichkeit für die Elektron-Photonwechselwirkung W_{hv} , die für ein parabolisches Band durch das Quadrat des Impulses bestimmt ist:

$$W_{hv} \sim p^2 = 2 m^* E = 2 \hbar^2 E / \frac{\partial^2 E}{\partial k^2}. \quad (9)$$

Genäherte Bestimmung der $E(k)$ -Verlaufs

Der Bandverlauf $E(k)$ läßt sich jedoch näherungsweise bestimmen, wenn man auf die klassische DRUDESche Theorie der Absorption freier Ladungsträger zurückgeht. Es sei darauf hingewiesen, daß diese Theorie bisher die Absorption im Fremdleitungsbereich (und bei nur einer Trägersorte) dann sehr befriedigend wiedergegeben hat, wenn man statt der Elektronenmasse die effektive Masse einsetzt, die mit dem Bandverlauf definitionsgemäß im folgenden Zusammenhang steht:

$$1/m^* = (1/\hbar^2) (\partial^2 E / \partial k^2), \quad (10)$$

und wenn die induzierte Emission mit hinzuzuziehen ist (wie z. B. bei den Metallen).

Die gute Näherung der DRUDESchen Formel läßt sich noch zweifach begründen, indem man 1. den Spektralbereich der Messung und 2. das Vorhandensein der induzierten Emission diskutiert.

1. Die strenge quantenmechanische Rechnung liefert nur dann wesentliche Abweichungen von dieser durch m^* an das Bändermodell angepaßten klassischen Form, wenn die induzierte Emission wegen der zu geringen Auffüllung des Bandes ausfällt, also für nicht entartete Halbleiter unter der Bedingung $h\nu \gg kT$ (vergleiche oben) und zwar in der Form eines Korrekturfaktors:

$$A = [4/(9\sqrt{\pi})] (h\nu/kT)^{1/2}. \quad (11)$$

Umgekehrt geht die quantentheoretische Formel für $h\nu \ll kT$ (Hinzunahme der induzierten Emission) exakt in die DRUDESche Formel über. Ein quantitativer Vergleich¹³ zeigt, daß die Abweichungen von der DRUDESchen Theorie (unter Verwendung der effektiven Masse) vernachlässigbar sind, wenn nur $h\nu \leq 10 kT$ ist. Im vorliegenden Fall (20°C und 10μ) ist $h\nu$ nur 5-mal größer als kT .

In diesem Bereich weicht auch die Wellenlängenabhängigkeit nach streng quantentheoretischer Rechnung nicht mehr vom λ^2 -Gesetz ab¹⁴.

2. Wesentlicher erscheint jedoch die Tatsache, daß bei einem entarteten Halbleiter mit größenordnungsmäßig kleiner effektiver Masse, wie z. B. InSb, das Band auch bei tieferen Temperaturen wesentlich weiter als kT aufgefüllt ist, so daß die induzierte Emission möglich ist. Damit ergibt sich wieder die DRUDESche Formel.

Nach Moss^{7c} liegt für InSb das FERMI-Niveau bei 10^{17} Elektronen/cm³ um 0,046 eV, bei 10^{18} um 0,18 eV und bei 10^{19} um 0,48 eV über dem unteren Rand des Leitungsbandes.

Die vorliegenden Messungen haben die nach obigen Ausführungen zu erwartende λ^2 -Abhängigkeit exakt bestätigt.

Zunächst befreit man sich von der FERMI-Verteilung durch die Näherung, daß die Energiezustände des Bandes bis zu einer Energie $E_v(k_v)$ alle besetzt sind gemäß der Definitionsgleichung für $E_v(k_v)$

$$N = \int_{E_{Rand}}^{E_v} D(E) dE. \quad (12)$$

Liegt das FERMI-Niveau hinreichend weit im Band, so ist E_v gleich der FERMI-Grenzenergie.

¹³ K. J. PLANKER u. E. KAUFER, Z. angew. Phys. **12**, 425 [1960].

¹⁴ Für $h\nu \gg kT$ ergibt sich unter Berücksichtigung des Korrekturfaktors A ein $\lambda^{1.5}$ -Gesetz.

Für das Folgende ist es zweckmäßiger, nicht über E , sondern über k zu integrieren.

Liegt das Extremum des Bandes im Zentrum der BRILLOUIN-Zone, so gilt quantentheoretisch stets

$$N = \int_0^{k_v} D(k) dk = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_v} k^2 dk \quad (13)$$

$$= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{k_v}{2\pi} \right)^3.$$

Mit dem Absorptionsquerschnitt nach DRUDE an der Stelle k

$$q(k) = C \lambda^2 [m^{*2}(k) b(k)]^{-1} \quad (14)$$

ergibt sich der Absorptionskoeffizient zu

$$K(k_v) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_v} q(k) k^2 dk \quad (15)$$

$$= \frac{C \lambda^2}{\pi^2} \int_0^{k_v} \frac{k^2}{m^{*2}(k) b(k)} dk.$$

Die Beweglichkeit des freien Trägers an der Stelle k kann allgemein ersetzt werden durch

$$b(k) = \frac{e \tau(k)}{m^*(k)}; \quad \tau = \text{Stoßzeit.} \quad (16)$$

Für die Stoßzeit an der Stelle k führt man eine Näherung ein, indem man für alle Träger der Gesamtheit $N(k_v)$ deren *mittlere* Stoßzeit einsetzt $\tau(k_v)$. Die Näherung ist recht gut, da die λ^2 -Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten die Unabhängigkeit der Stoßzeit von der Energie nahelegt (vgl. Moss ^{7b}, S. 238). Dies bestätigen auch die Messungen der Photoleitfähigkeit und des photoelektromagnetischen Effektes von KURNICK und ZITTER ¹⁵. Überdies wird der Mittelwert verwendet.

Damit wird

$$K(k_v) = \frac{c \lambda^2}{\tau(k_v) e \pi^2} \int_0^{k_v} \frac{k^2}{m^*(k)} dk. \quad (17)$$

Auf der anderen Seite liefert $K(k_v)$ auf Grund der gleichen Überlegungen den schon in Abb. 4 als Funktion von N aufgetragenen Mittelwert $\bar{m}^*(k_v)$ gemäß der Gleichung

$$K(k_v) = \frac{c \lambda^2}{e \tau(k_v)} \frac{N}{\bar{m}^*(k_v)}. \quad (18)$$

¹⁵ S. W. KURNICK u. R. N. ZITTER, J. Appl. Phys. 27, 278 [1956]. Nach SPITZER und FAN erniedrigt sich die Stoßzeit beim Übergang von $6 \cdot 10^{16}$ auf $1,2 \cdot 10^{18}$ Elektronen pro cm^3 nur um 18%.

$\tau(k_v)$ wurde dort mit Hilfe der Beziehung

$$b(k_v) = \frac{e \tau(k_v)}{m^*(k_v)} \quad (19)$$

auf die experimentell aus elektrischen Messungen bestimmte mittlere Beweglichkeit $b(k_v)$ zurückgeführt.

Es sei darauf hingewiesen, daß die DRUDESche Theorie auf der Annahme basiert, daß für die optische Absorption und die elektrische Leitfähigkeit die gleiche Beweglichkeit der freien Ladungsträger einzusetzen ist.

Auf diese Weise erhält man aus Gl. (17)

$$\frac{N(k_v)}{m^*(k_v)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_v} \frac{1}{m^*(k)} k^2 dk. \quad (20)$$

Trägt man $N(k_v)/\bar{m}^*(k_v)$ gegen N auf, so liefert die Differentiation wegen Gl. (13)

und $dk^3 = 3 k^2 dk$

sofort $1/\bar{m}^*(k_v).$

Der Bandverlauf $E(k)$ läßt sich nun leicht durch zweimalige graphische Integration der Funktion (I) $g(k_v)$

$$\frac{1}{m^*(k_v)} = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right) \equiv g(k_v) = g(\sqrt[3]{N \pi^2 \cdot 3}) \quad (21)$$

ermitteln: Abb. 5.

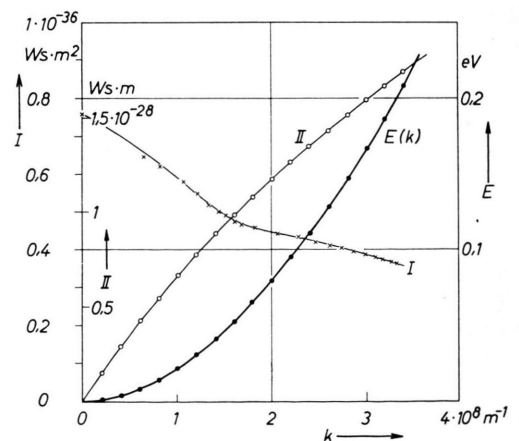


Abb. 5. $E(k)$ -Verlauf des Leitungsbandes von InSb, gewonnen durch zweimalige Integration der Ausgangsfunktion I: $\hbar^2/m^* = \partial^2 E / \partial k^2$ (Funktion II: erste Integration $\partial E / \partial k$).

Abb. 5 zeigt dazu neben der Ausgangsfunktion (I) auch die erste Integration (II).

Damit ist der Verlauf des Leitungsbandes von InSb quantitativ aus der Absorption der freien Ladungsträger bestimmt. Das Band läuft, wie es stets

sein muß, bei $k=0$ mit waagerechter Tangente ein. Bei $1,24 \cdot 10^{18}$ freien Elektronen pro cm^3 ist es bereits bis 0,18 eV aufgefüllt.

Das Band verläuft am Bandrand offenbar nur ein sehr kleines Stück parabolisch, wo die effektive Masse, wie bereits aus der Extrapolation des Mittelwertes m^* angegeben,

$$m_{\text{Rand}}^* = 0,016 m_0 \quad \text{beträgt.}$$

Abb. 6 zeigt den Verlauf von m^* in Abhängigkeit von k quantitativ. Die eingezeichnete $E(k)$ -Funktion erlaubt auch die Entnahme der Abhängigkeit m^* von der Energie (Abstand vom Bandrand).

Vergleicht man den gewonnenen $E(k)$ -Verlauf mit dem Ergebnis von SPITZER und FAN⁹ (Messungen der Polarisierbarkeit freier Elektronen in InSb), so kann man im unteren Überlappungsbereich eine gute quantitative Übereinstimmung feststellen. Bei höheren k -Werten liegt unsere Energiefunktion etwas höher. Im vorliegenden Fall konnte vor allem der $E(k)$ -Verlauf praktisch bis $k=0$ herangeführt werden, während die genannten Autoren nur oberhalb von $k=1 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$ genaue Angaben machen. In Abb. 6 ist der Verlauf von SPITZER und FAN gestrichelt eingetragen¹⁶.

Die Messungen bestätigen im übrigen auch die theoretische Berechnung des Leitungsbandverlaufes von KANE¹⁷.

Die Gültigkeit der Rechnung läßt sich auch prüfen an den Halbleitern, die bekanntermaßen einen parabolischen Bandverlauf haben, wenigstens soweit, daß die Mehrzahl der freien Träger im parabolischen Bereich bleiben.

Silicium und Germanium z. B. zeigen dementspre-

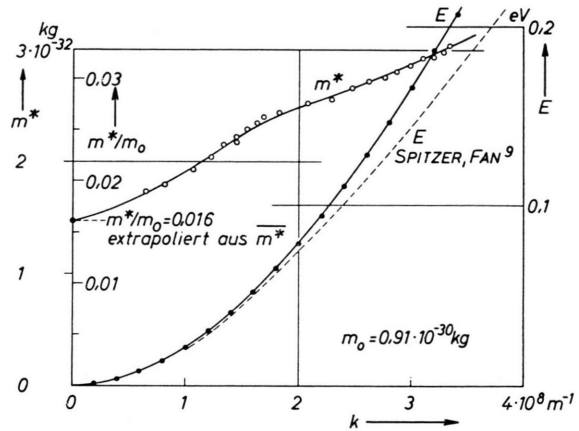


Abb. 6. m^* für Elektronen in InSb in Abhängigkeit vom Ausbreitungsvektor k . Eine andere Ordinatenenteilung liefert dazu den Quotienten (m^*/m_0) . Der eingezeichnete $E(k)$ -Verlauf erlaubt die Entnahme der Abhängigkeit von E [Abstand vom Bandrand in (eV)]. Gestrichelt ist $E(k)$ nach SPITZER und FAN⁹.

chend strenge Linearität zwischen Absorptionskoeffizient und Trägerdichte. m^* ist eine Konstante und die Bestimmung der effektiven Masse gelingt direkt aus dem Absorptionskoeffizienten. Aus der Literatur sind derartige Bestimmungen hinreichend bekannt^{2, 18-20}.

In Umkehrung liefert obige Integrationsmethode zur $E(k)$ -Bestimmung für den Fall K proportional N richtig einen rein parabolischen $E(k)$ -Verlauf.

Die Verfasser danken besonders der Philips Zentral-laboratorium GmbH, Aachen, und dabei Herrn Dr. A. E. PANNENBORG für die InSb-Proben mit den Angaben der Trägerdichte und der Leitfähigkeit sowie dem Institutsdirektor Herrn Prof. Dr. C. VON FRAGSTEIN für die Förderung der Arbeit.

¹⁶ Aus der veröffentlichten Abbildung entnommen.

¹⁷ E. O. KANE, J. Phys. Chem. Solids **1**, 249 [1957].

¹⁸ A. H. KAHN, Phys. Rev. **97**, 1647 [1955].

¹⁹ F. R. KESSLER, Z. Naturforsch. **11 a**, 763 [1956].

²⁰ F. R. KESSLER u. J. SCHNELL, Z. Naturforsch. **13 a**, 458 [1958].